Vektorräume

1. Aufgabe:

Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum so, dass $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig sind. Weiterhin sei für $k \in \{1, \dots, n\}$ der Vektor $w_k := \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind.

2. Aufgabe:

Sei $M := \{[-1, 2, 0, 0]^\top, [1, 1, 0, 1]^\top, [1, 0, 3, 3]^\top\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Zeigen Sie, dass M linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist.

b) Tauschen Sie in M den Vektor $[1, 1, 0, 1]^\top$ durch $[-2, 0, 3, 1]^\top$ aus. Begründen Sie mit dem Austauschlemma, ob die erhaltene Menge weiterhin ein linear unabhängiges System ist.

c) Beweisen Sie: $\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}(M) \oplus \operatorname{span}([1, 0, 0, 0]^\top)$.

3. Aufgabe:

Sei der unitäre Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $V = \mathbb{C}^{2,2}$ und dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = \operatorname{Spur}(B^H A)$ gegeben. In dieser Aufgabe betrachten wir V als einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, d.h. alle Koeffizienten in Linearkombinationen sind stets reell.

a) Beweisen Sie, dass

$$U = \{A \in V \mid A^H = A\}$$

ein Unterraum von V bzgl. $\mathbb{R}$ ist.

b) Begründen Sie, dass

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ein Erzeugendensystem von U ist.

c) B aus b) ist sogar eine Orthonormalbasis von U (ohne Beweis). Was ist die orthogonale Projektion von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

auf U?

4. Aufgabe:

Seien $K := \mathbb{R}$ und $V := \mathbb{R}^3$.

a) Seien $U := \operatorname{span}([1, 1, 0]^\top, [0, -1, 0]^\top)$ und $W := \operatorname{span}([0, -1, 1]^\top, [0, 0, 2]^\top)$.
Berechnen Sie $U \cap W$ und $U + W$. Ist die Summe direkt?

b) Zeigen Sie: $M := \{[a, b, c]^\top \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a - c = 0\}$ ist ein K-Unterraum von V.
Bestimmen Sie außerdem die Dimension von M.

5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

- ☐ Es ist $\{[1,-2,0]^\top, [1,1,-2]^\top, [0,1,1]^\top\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Seien $L \subseteq V$ eine K-linear unabhängige Menge, $u \in V$, aber $u \notin \operatorname{span}(L)$ und $v \in V$. Es ist $(L \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ linear unabhängig über K.
- ☐ Seien V endlichdimensional und U_1, U_2 K-Unterräume von V so, dass $\dim(U_1) =: m_1, \dim(U_2) =: m_2$. Dann gilt: $0 \le \dim(U_1 + U_2) \le \min(m_1, m_2)$.
- ☐ Es gibt eine 5-elementige Basis von $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Je n paarweise verschiedene Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bilden immer eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Seien $v \in V$, B eine Basis von V, die v enthält, und $\lambda \in K, \lambda \neq 1_K$. Dann ist $\lambda \cdot v \notin B$.
- ☐ Jeder Vektor aus V liegt in einer Basis von V.
- ☐ Jede linear unabhängige Menge von Vektoren aus V bildet eine Basis von V.
- ☐ Jedes Erzeugendensystem für V bildet eine Basis von V.

Lineare Abbildungen

1. Aufgabe:

Kreuze an, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt oder nicht. Entscheide außerdem, ob ein Mono-, Epi-, Iso-, Endo- oder Automorphismus vorliegt.

	keine lin. Abbildung	lineare Abbildung					
		Monomor-phismus	Epimor-phismus	Isomor-phismus	Endomor-phismus	Automor-phismus	ohne weitere Eig.schaften
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_3^3 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 0 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_6 : V \to W$ geg. durch: $\forall v \in V : f_6(v) = 0_W$ $(V \neq \{0_V\}, W \neq \{0_W\})$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\Phi_B : V \to K^4$, wobei V ein 4-dimensionaler K-VR ist und B geordnete Basis von V.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_7 : \mathbb{R}^{3,4} \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $A \mapsto [A]_{:,4}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2. Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe kurz!

- Sind die Vektorräume V und W isomorph, so ist jede lineare Abbildung von V nach W ein Isomorphismus.
- Ist $f \in L(V,W)$ ein Monomorphismus, so ist f auch ein Epimorphismus.
- Ist $\dim(V) < \dim(W)$, so ist jede lineare Abbildung von V nach W injektiv.
- Ist $\dim(V) > \dim(W)$, so ist jede lineare Abbildung von V nach W surjektiv.
- Ist $\dim(V) > \dim(W)$, so gibt es keinen Monomorphismus von V nach W.
- Jeder Monomorphismus von V nach V ist auch ein Epimorphismus.
- Sei $\dim(V) = \dim(W)$. Dann gilt: $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = W$.
- Sei $A \in K^{n,m}$. Dann gilt: Ist f_A ein Epimorphismus, so gilt $\mathrm{span}\{a_1, ..., a_m\} = K^m$.
- Ist f_A ein Monomorphismus, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung.
- Ist $B_1 := (b_1, b_2, b_3)$ eine K-Basis des Vektorraumes V und $B_2 := (b_1+b_1, b_2+b_2, b_3+b_3)$ ebenfalls, dann gilt für die darstellenden Matrizen eines Endomorphismus $f \in L(V,V)$: $[f]_{B_2,B_2} = [f]_{B_1,B_1} + [f]_{B_1,B_1}$.

3. Aufgabe:

Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ und die Vektoren $v_1 := [1,0,2]^\top, v_2 = [0,1,1]^\top, v_3 = [0,0,-1]^\top$. Weiter sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch:

$$f(v_1) = [2,0,4]^\top, f(v_2) = [0,1,2]^\top, f(v_3) = [0,-2,-4]^\top$$

a) Berechne $f([1,2,3]^\top)$.

b) Sei $B_1 := (v_1, v_2, v_3)$. Bestimme die darstellende Matrix $[f]_{B_1,B_1}$. Bestimme anschließend $\dim(\mathrm{Im}(f))$. Untersuche, ob f surjektiv/injektiv ist.

c) Sei B die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimme die darstellende Matrix $[f]_{B,B}$ von f bezüglich B.

d) Gib ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge $\mathrm{Ker}(f)$ ist, und löse es mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Gib eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ an!

e) Sei B_1 wie in b). Weiter sei $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Koordinaten bezüglich B_1:

$$\Phi_{B_1}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Berechne v und $f(v)$.

4. Aufgabe:

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der geordneten Basis $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Die lineare Abbildung $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ sei gegeben durch: $f(b_1) = b_1 + b_2, f(b_2) = 3b_2, f(b_3) = b_1 - 2b_4, f(b_4) = b_3$. Zeige, dass f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt und bestimme eine darstellende Matrix von f^{-1}.

Linear- und Bilinearformen

1. Aufgabe:

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $v, w, x \in V := \mathbb{R}^n$. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem Standardskalarprodukt.
Sei die Relation $\sim$ auf V gegeben durch

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{ Es existiert ein } Q \in O(n) \text{ mit } v = Qw.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert.

2. Aufgabe:

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Was ist die darstellende Matrix von der Bilinearform bezüglich der Standardbasis?

b) Sei $\| \cdot \|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erzeugte Norm. Berechnen Sie $\|a\|$ für $a = [-2, 3]^T$.

c) Sei $V := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Berechnen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine ONB zu der Basis $(v_1, v_2) = (e_1, e_1 - e_2)$ von V.

3. Aufgabe:

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei der Unterraum

$$U = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB von U ohne vorher zu testen, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

4. Aufgabe:

Es seien $K = \mathbb{R}$ und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Weiter sei $\alpha\colon V \to K$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$ gelte $\alpha(\lambda v) = |\lambda|\alpha(v)$.

(ii) Für alle $v_1, v_2 \in V$ gelte $\alpha(v_1 + v_2) \leq \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$.

(Die Abbildung α heißt dann eine *Halbnorm* auf V.)
Zeigen Sie

a) Für alle $v \in V$ ist $\alpha(v) \geq 0$.

b) $U := \{v \mid v \in V,\ \alpha(v) = 0\}$ ist ein Unterraum von V.

c) Für $v + U \in V/U$ definiere $\|v + U\| := \alpha(v)$, so ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V/U.

5. Aufgabe:

Gegeben seien die Basen $B = (v_1, v_2, v_3)$ und $C = (w_1, w_2, w_3)$ des 3-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit $w_1 = v_1,\ w_2 = v_2$ und

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie die zu B duale Basis B^*.
2. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert als $f([a_1, a_2, a_3]^T) = 2a_1 - a_3$. Schreiben Sie die Linearform f als Linearkombination bzgl. der Dualbasis B^*.
3. Untersuchen Sie, ob $v_1^* = w_1^*$ ist, indem sie v_1^* als eine Linearkombination bzgl. der Dualbasis C^* schreiben.

Eigenwerte

1. Aufgabe:

Sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von f.

b) Begründen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

c) Sei $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $A = [f]_{B,B}$. Geben Sie eine Matrix $S \in GL_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, sodass

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

d) Gibt es auch ein $S \in O(2)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist?

e) Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von der Umkehrabbildung f^{-1} an, ohne f^{-1} auszurechnen.

2. Aufgabe:

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -24 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe:

Sei ein unitärer Vektorraum $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ gegeben. Folgern Sie jeweils mit dem Skalarprodukt:

a) Wenn $A^2 = A^H$, dann liegen die Eigenwerte von A in der Menge $\{0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\}$.

b) Wenn $A^2 = (A^H)^2$, dann sind alle Eigenwerte von A entweder rein imaginär oder rein reell.

4. Aufgabe:

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 1}, \qquad (\alpha_1 t + \alpha_0) \mapsto (\alpha_1 - 2\alpha_0)t + (3\alpha_1 - 4\alpha_0)$$

a) Geben Sie die darstellende Matrix $[f]_{B,B}$ von f bzgl. der Standardbasis $B = (t, 1)$ des $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ an.

b) Sei $B_1 = (t+1, 2t+3)$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$. Bestimmen Sie die Koordinatentransformationsmatrizen $[\mathrm{id}]_{B,B_1}, [\mathrm{id}]_{B_1,B}$ und damit $[f]_{B_1,B_1}$.

c) Ist f diagonalisierbar?

5. Aufgabe:

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gibt eine Isometrie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T([0,0]^\top) = [1,0]^\top \qquad T([5,0]^\top) = [4,-4]^\top \qquad T([0,5]^\top) = [5,3]^\top$$

und der Abbildungsvorschrift $T(x) = Qx + q, Q \in O(2), q \in \mathbb{R}^2$. Aus den Eigenwerten von Q erkennt man, dass $f(x) = Qx$ eine Drehung definiert.

b) Wenn V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung sind, sodass -1 ein Eigenwert von $f^2 + f$ ist, dann ist 1 ein Eigenwert von f^3

c) Die Menge

$$U = \left\{ f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^2) \mid \; v = [1,1]^\top \text{ ist Eigenvektor von } f \right\}$$

ist eine Untergruppe von $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^2)$ bzgl. der Hintereinanderausführung $\circ$.
Hinweis: $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^2)$ ist die Menge aller Automorphismen auf $\mathbb{R}^2$.

d) Wenn $N = \mathbb{C}^{n,n} \backslash \{0\}$ nilpotent ist, d.h. $N^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist N nicht diagonalisierbar.