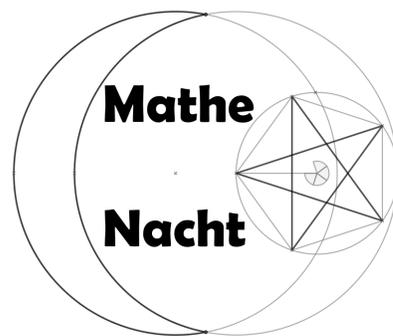
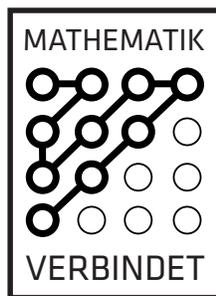


# Vektorräume



## 1. Aufgabe:

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum so, dass  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear unabhängig sind.

Weiterhin sei für  $k \in \{1, \dots, n\}$  der Vektor  $w_k := \sum_{i=1}^k v_i$ .

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass  $w_1, \dots, w_n$  linear unabhängig sind.

## 2. Aufgabe:

Sei  $M := \{[-1, 2, 0, 0]^\top, [1, 1, 0, 1]^\top, [1, 0, 3, 3]^\top\} \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- Zeigen Sie, dass  $M$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  ist.
- Tauschen Sie in  $M$  den Vektor  $[1, 1, 0, 1]^\top$  durch  $[-2, 0, 3, 1]^\top$  aus. Begründen Sie mit dem Austauschlemma, ob die erhaltene Menge weiterhin ein linear unabhängiges System ist.
- Beweisen Sie:  $\mathbb{R}^4 = \text{span}(M) \oplus \text{span}([1, 0, 0, 0]^\top)$ .

## 3. Aufgabe:

Sei der unitäre Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit  $V = \mathbb{C}^{2,2}$  und dem Skalarprodukt  $\langle A, B \rangle = \text{Spur}(B^H A)$  gegeben. In dieser Aufgabe betrachten wir  $V$  als einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, d.h. alle Koeffizienten in Linearkombinationen sind stets reell.

- Beweisen Sie, dass

$$U = \{A \in V \mid A^H = A\}$$

ein Unterraum von  $V$  bzgl.  $\mathbb{R}$  ist.

- Begründen Sie, dass

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ein Erzeugendensystem von  $U$  ist.

- $B$  aus b) ist sogar eine Orthonormalbasis von  $U$  (ohne Beweis). Was ist die orthogonale Projektion von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

auf  $U$ ?

## 4. Aufgabe:

Seien  $K := \mathbb{R}$  und  $V := \mathbb{R}^3$ .

- Seien  $U := \text{span}([1, 1, 0]^\top, [0, -1, 0]^\top)$  und  $W := \text{span}([0, -1, 1]^\top, [0, 0, 2]^\top)$ . Berechnen Sie  $U \cap W$  und  $U + W$ . Ist die Summe direkt?
- Zeigen Sie:  $M := \{[a, b, c]^\top \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a - c = 0\}$  ist ein  $K$ -Unterraum von  $V$ . Bestimmen Sie außerdem die Dimension von  $M$ .

### 5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Seien  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

- Es ist  $\{[1, -2, 0]^\top, [1, 1, -2]^\top, [0, 1, 1]^\top\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ .
- Seien  $L \subseteq V$  eine  $K$ -linear unabhängige Menge,  $u \in V$ , aber  $u \notin \text{span}(L)$  und  $v \in V$ . Es ist  $(L \setminus \{v\}) \cup \{u\}$  linear unabhängig über  $K$ .
- Seien  $V$  endlichdimensional und  $U_1, U_2$   $K$ -Unterräume von  $V$  so, dass  $\dim(U_1) =: m_1, \dim(U_2) =: m_2$ . Dann gilt:  $0 \leq \dim(U_1 + U_2) \leq \min(m_1, m_2)$ .
- Es gibt eine 5-elementige Basis von  $\mathbb{R}^3$ .
- Je  $n$  paarweise verschiedene Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  bilden immer eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ .
- Seien  $v \in V, B$  eine Basis von  $V$ , die  $v$  enthält, und  $\lambda \in K, \lambda \neq 1_K$ . Dann ist  $\lambda \cdot v \notin B$ .
- Jeder Vektor aus  $V$  liegt in einer Basis von  $V$ .
- Jede linear unabhängige Menge von Vektoren aus  $V$  bildet eine Basis von  $V$ .
- Jedes Erzeugendensystem für  $V$  bildet eine Basis von  $V$ .



## 2. Aufgabe :

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe kurz!

- Sind die Vektorräume  $V$  und  $W$  isomorph, so ist jede lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  ein Isomorphismus.
- Ist  $f \in L(V, W)$  ein Monomorphismus, so ist  $f$  auch ein Epimorphismus.
- Ist  $\dim(V) < \dim(W)$ , so ist jede lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  injektiv.
- Ist  $\dim(V) > \dim(W)$ , so ist jede lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  surjektiv.
- Ist  $\dim(V) > \dim(W)$ , so gibt es keinen Monomorphismus von  $V$  nach  $W$ .
- Jeder Monomorphismus von  $V$  nach  $V$  ist auch ein Epimorphismus.
- Sei  $\dim(V) = \dim(W)$ . Dann gilt:  $\text{Ker}(f) = \{0_V\} \Rightarrow \text{Im}(f) = W$ .
- Sei  $A \in K^{n,m}$ . Dann gilt: Ist  $f_A$  ein Epimorphismus, so gilt  $\text{span}\{a_1, \dots, a_m\} = K^m$ .
- Ist  $f_A$  ein Monomorphismus, so hat das lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$  genau eine Lösung.
- Ist  $B_1 := (b_1, b_2, b_3)$  eine  $K$ -Basis des Vektorraumes  $V$  und  $B_2 := (b_1+b_1, b_2+b_2, b_3+b_3)$  ebenfalls, dann gilt für die darstellenden Matrizen eines Endomorphismus  $f \in L(V, V)$ :  $[f]_{B_2, B_2} = [f]_{B_1, B_1} + [f]_{B_1, B_1}$ .

## 3. Aufgabe :

Gegeben seien der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V := \mathbb{R}^3$  und die Vektoren  $v_1 := [1, 0, 2]^\top$ ,  $v_2 = [0, 1, 1]^\top$ ,  $v_3 = [0, 0, -1]^\top$ . Weiter sei die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  gegeben durch:

$$f(v_1) = [2, 0, 4]^\top, f(v_2) = [0, 1, 2]^\top, f(v_3) = [0, -2, -4]^\top$$

- Berechne  $f([1, 2, 3]^\top)$ .
- Sei  $B_1 := (v_1, v_2, v_3)$ . Bestimme die darstellende Matrix  $[f]_{B_1, B_1}$ . Bestimme anschließend  $\dim(\text{Im}(f))$ . Untersuche, ob  $f$  surjektiv/injektiv ist.
- Sei  $B$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Bestimme die darstellende Matrix  $[f]_{B, B}$  von  $f$  bezüglich  $B$ .
- Gib ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge  $\text{Ker}(f)$  ist, und löse es mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Gib eine Basis von  $\text{Ker}(f)$  an!
- Sei  $B_1$  wie in b). Weiter sei  $v \in \mathbb{R}^3$  gegeben durch die Koordinaten bezüglich  $B_1$ :

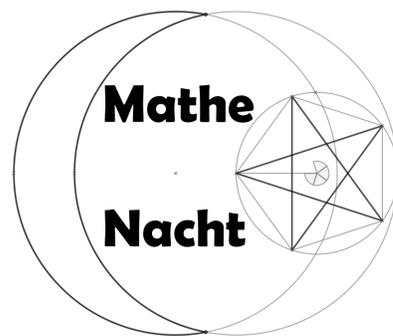
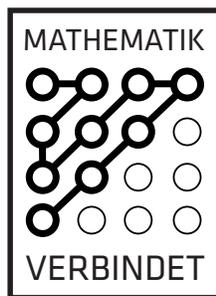
$$\Phi_{B_1}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Berechne  $v$  und  $f(v)$ .

## 4. Aufgabe :

Gegeben sei der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  mit der geordneten Basis  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ . Die lineare Abbildung  $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  sei gegeben durch:  $f(b_1) = b_1 + b_2$ ,  $f(b_2) = 3b_2$ ,  $f(b_3) = b_1 - 2b_4$ ,  $f(b_4) = b_3$ . Zeige, dass  $f$  eine Umkehrabbildung  $f^{-1}$  besitzt und bestimme eine darstellende Matrix von  $f^{-1}$ .

# Linear- und Bilinearformen



## 1. Aufgabe:

Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $v, w, x \in V := \mathbb{R}^n$ . Wir betrachten den euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit dem Standardskalarprodukt.

Sei die Relation  $\sim$  auf  $V$  gegeben durch

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{Es existiert ein } Q \in O(n) \text{ mit } v = Qw.$$

Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $V$  definiert.

## 2. Aufgabe:

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  definiert ist. Was ist die darstellende Matrix von der Bilinearform bezüglich der Standardbasis?

b) Sei  $\|\cdot\|$  die von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm. Berechnen Sie  $\|a\|$  für  $a = [-2, 3]^T$ .

c) Sei  $V := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Berechnen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine ONB zu der Basis  $(v_1, v_2) = (e_1, e_1 - e_2)$  von  $V$ .

## 3. Aufgabe:

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum  $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei der Unterraum

$$U = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{span} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB von  $U$  ohne vorher zu testen, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

#### 4. Aufgabe:

Es seien  $K = \mathbb{R}$  und  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Weiter sei  $\alpha: V \rightarrow K$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle  $v \in V$  und  $\lambda \in K$  gelte  $\alpha(\lambda v) = |\lambda|\alpha(v)$ .
- (ii) Für alle  $v_1, v_2 \in V$  gelte  $\alpha(v_1 + v_2) \leq \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$ .

(Die Abbildung  $\alpha$  heißt dann eine *Halbnorm* auf  $V$ .)

Zeigen Sie

- a) Für alle  $v \in V$  ist  $\alpha(v) \geq 0$ .
- b)  $U := \{v \mid v \in V, \alpha(v) = 0\}$  ist ein Unterraum von  $V$ .
- c) Für  $v + U \in V/U$  definiere  $\|v + U\| := \alpha(v)$ , so ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $V/U$ .

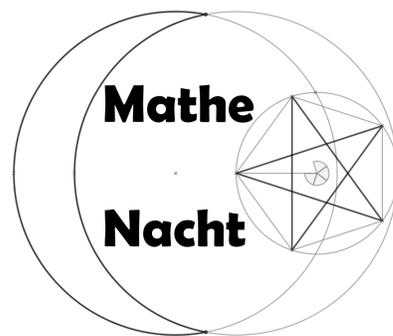
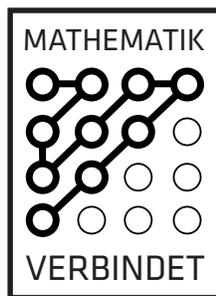
#### 5. Aufgabe:

Gegeben seien die Basen  $B = (v_1, v_2, v_3)$  und  $C = (w_1, w_2, w_3)$  des 3-dimensionalen Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  mit  $w_1 = v_1$ ,  $w_2 = v_2$  und

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie die zu  $B$  duale Basis  $B^*$ .
2. Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f([a_1, a_2, a_3]^T) = 2a_1 - a_3$ . Schreiben Sie die Linearform  $f$  als Linearkombination bzgl. der Dualbasis  $B^*$ .
3. Untersuchen Sie, ob  $v_1^* = w_1^*$  ist, indem sie  $v_1^*$  als eine Linearkombination bzgl. der Dualbasis  $C^*$  schreiben.

# Eigenwerte



## 1. Aufgabe:

Sei die lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von  $f$ .
- Begründen Sie, dass  $f$  diagonalisierbar ist.
- Sei  $B = (e_1, e_2)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^2$  und  $A = [f]_{B,B}$ . Geben Sie eine Matrix  $S \in GL_2(\mathbb{R})$  und eine Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{2,2}$  an, sodass

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

- Gibt es auch ein  $S \in O(2)$ , sodass  $S^{-1}AS$  eine Diagonalmatrix ist?
- Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  an, ohne  $f^{-1}$  auszurechnen.

## 2. Aufgabe:

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ ?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -24 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

## 3. Aufgabe:

Sei ein unitärer Vektorraum  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  gegeben. Folgern Sie jeweils mit dem Skalarprodukt:

- Wenn  $A^2 = A^H$ , dann liegen die Eigenwerte von  $A$  in der Menge  $\{0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ .
- Wenn  $A^2 = (A^H)^2$ , dann sind alle Eigenwerte von  $A$  entweder rein imaginär oder rein reell.

## 4. Aufgabe:

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 1}, \quad (\alpha_1 t + \alpha_0) \mapsto (\alpha_1 - 2\alpha_0)t + (3\alpha_1 - 4\alpha_0)$$

- Geben Sie die darstellende Matrix  $[f]_{B,B}$  von  $f$  bzgl. der Standardbasis  $B = (t, 1)$  des  $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$  an.
- Sei  $B_1 = (t+1, 2t+3)$  eine weitere Basis des  $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ . Bestimmen Sie die Koordinatentransformationsmatrizen  $[\text{id}]_{B,B_1}$ ,  $[\text{id}]_{B_1,B}$  und damit  $[f]_{B_1,B_1}$ .
- Ist  $f$  diagonalisierbar?

## 5. Aufgabe :

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- a) Es gibt eine Isometrie  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$T([0, 0]^\top) = [1, 0]^\top \quad T([5, 0]^\top) = [4, -4]^\top \quad T([0, 5]^\top) = [5, 3]^\top$$

und der Abbildungsvorschrift  $T(x) = Qx + q, Q \in O(2), q \in \mathbb{R}^2$ . Aus den Eigenwerten von  $Q$  erkennt man, dass  $f(x) = Qx$  eine Drehung definiert.

- b) Wenn  $V$  ein Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung sind, sodass  $-1$  ein Eigenwert von  $f^2 + f$  ist, dann ist  $1$  ein Eigenwert von  $f^3$
- c) Die Menge

$$U = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2) \mid v = [1, 1]^\top \text{ ist Eigenvektor von } f\}$$

ist eine Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{R}^2)$  bzgl. der Hintereinanderausführung  $\circ$ .

*Hinweis:*  $\text{Aut}(\mathbb{R}^2)$  ist die Menge aller Automorphismen auf  $\mathbb{R}^2$ .

- d) Wenn  $N = \mathbb{C}^{n,n} \setminus \{0\}$  nilpotent ist, d.h.  $N^m = 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  gilt, dann ist  $N$  nicht diagonalisierbar.